המוגדרות על . נגיד ש על S אם לכל מתקיים ש. ז"א לכל ולכל קיים כך שאם אזי

# הגדרה

תהיינה וf מוגדרות על . נגיד ש במ"ש על S אם לכל קיים כך שאם אזי לכל

## הערה

אם במ"ש על S אזי על S.

# דוגמה

לכל מתקיים . לכן על S. אבל **לא** שואפת במ"ש לf על S. אמנם קח אזי אם נגדיר ברור ש.

# דוגמה

*במ"ש על . אמנם יהי . קח . אזי אם :*

# הגדרה

יהי טור של פונקציות המוגדרות על . נגיד ש מתכנס במ"ש על T אם הסדרה מתכנסת במ"ש על T באשר .

# שאלה

* מהו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש תתכנס במ"ש?
* אותה השאלה עבור ?

# משפט

הסדרה מתכנסת במ"ש על S(ז"א קיימת f המוגדרת על S כך ש במ"ש על S) אם ורק אם היא מקיימת תנאי קושי במ"ש:  
לכל קיים () כך שאם אזי לכל

# הוכחה

נניח ש במ"ש על S, ויהי . קיים N כך שאם אזי לכל , ואז אם מתקיים לכל :  
בכיוון ההפוך: נניח ש מקיימת תנאי קושי במ"ש על S. אזי לכל הסדרה של מספרים  *הינה סדרת קושי ולכן מתכנסת. נסמן את .*

*טענה: במ"ש על S. אמנם יהי . קיים N כך שאם אזי לכל . ז"א במ"ש* על S.

# משפט

יהי טור של פונקציות המוגדרות על . תנאי הכרחי ומספיק לכך שטור זה יתכנס במ"ש על T הינו שלכל קיים () כך שאם אזי לכל .

# מבחן הM של ווירשטראס

תהיינה סדרה של פונקציות המוגדרות על ונניח ש עבור כל באשר הסדרה של מספרים ממשיים מקיימת לכל n ו. אזי הטור מתכנס במ"ש על T.

## הוכחה

יהי קיים N כך שאם אזי . לכן*לכן , לכן הטור מתכנס במ"ש.*

# דוגמאות

הטור מתכנס במ"ש על . אמנם לכל ו. לכן ע"פ מבחן הM מתכנס במ"ש על .

# הערה

אם מקיים את התנאי של מבחן הM לא רק מתכנס במ"ש אלא גם מתכנס במ"ש על T.

## דוגמה

יתכן ש יתכנס במ"ש על T אבל יתבדר.

קח . נקבע . ע"פ משפט לייבניף הטור מתכנס שכן שואפת מונוטונית ל0. בנוסף לכך . ז"א ש לכל . ז"א במ"ש על . ,

אבל מתבדר לכל !

## תרגיל

הוכח את הטענה האחרונה

# משפט

תהיינה פונקציות על קטע I כך שכל רציפה ב. אם במ"ש על I אזי f אף היא רציפה ב.

## מסקנה

תהיינה סדרה של פונקציות רציפות על . אם במ"ש על , אזי f רציפה אף היא בכל

## הוכחה

יהי . קיים N כך שאם אזי לכל . נקבע n כזה(למשל ). קיים כך שאם ו אזי ואז אם אזי

## הערה

אם רציפות ב ו במ"ש אזי ⇦ ז"א f רציפה ב.

# משפט

תהיינה פונקציות רציפות על . אם מתכנס במ"ש על  *אזי הסכום S הינה פונקציה רציפה על*

# הערה

ייתכן ש נקודתית כאשר רציפות ב וגם f רציפה שם בלי ש תשאף לf במ"ש על

# דוגמה

על . ברור ש לכל , אבל אין התכנסות במ"ש שכן אם , .

# משפט דיני(Dini)

נניח שלכל באשר f ו רציפות על . אזי במ"ש על הקטע.

## הערה

המשפט אינו נכון אם נחליף ב.  
המשפט אינו נכון אם נוותר על מונוטוניות של ההתכנסות.  
המשפט אינו נכון אם הפונקציה הגבולית אינה רציפה.

## דוגמה

על אין התכנסות במ"ש

### תרגיל

למצוא דוגמאות לשתי ההגבלות האחרות

## הוכחה

נסמן . אזי מתקיים לכל . יהי . לכל קיים כך ש ולכן לכל . כיוון ש רציפה ב יש קטע כך שאם אזי . הקטעים מהווים כיסוי פתוח לקטע הקומפקטי . לכן יש תת כיסוי סופי, נגיד . יהי .

טענה: עבור לכל .  
אמנם, עבור קיים כך ש ואז אם אזי . אבל ולכן אם ברור ש